# PROVA DE AVALIAÇÃO DE CONHECIMENTOS - 2021

## MATEMÁTICA

## Versão B

Alínea c) do n.º 1 do artigo 13.º-C do Decreto-Lei n.º 113/2014, de 16 de julho, republicado pelo Decreto-Lei n.º 11/2020, de 2 de abril.

Duração total da Prova: 120 minutos (Português + Matemática).

Tolerância: 30 minutos

7 Páginas

Para cada resposta, identifique o item a que corresponde.

Apresente apenas uma resposta para cada item.

Utilize apenas caneta ou esferográfica de tinta azul ou preta.

É permitido o uso de calculadora científica.

Não é permitido o uso de corretor.

Risque o que pretende que não seja classificado.

A cotação de cada item é de 5 pontos.

O enunciado da prova inclui um formulário.

Nas respostas aos itens de escolha múltipla, selecione a opção correta. Escreva, na folha de respostas o número do item e a letra que identifica a opção escolhida.

Utilize folhas diferentes para responder à parte geral de português e à parte específica de matemática.

# Formulário

## Probabilidades

$X$ é uma variável aleatória discreta, de valores $x_i$ com probabilidades $p_i$, $1 \leq i \leq n$

- Média de $X$
  $\mu = p_1x_1 + p_1x_2 + \cdots + p_nx_n$
- Desvio padrão de $X$
  $\sigma = \sqrt{p_1(x_1-\mu)^2 + p_2(x_2-\mu)^2 + \cdots + p_n(x_n-\mu)^2}$

Probabilidade condicionada de A sabendo que ocorreu B

- $P(A|B) = \frac{P(A\cap B)}{P(B)}$

## Estatística

Sendo $x_i$ valores observados e dimensão da amostra $N$

- Média
  $\bar{x} = \frac{x_1+x_2+\cdots+x_N}{N}$
- Variância
  $s^2 = \frac{(x_1-\bar{x})^2+(x_2-\bar{x})^2+\cdots+(x_N-\bar{x})^2}{N-1}$
- Desvio padrão
  $s = \sqrt{s^2}$

## Derivadas

- $tmv_{[a,b]} = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$
- $f'(a) = \lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h} = \lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$
- $(u+v)' = u' + v'$
- $(u \times v)' = u' \times v + u \times v'$
- $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'\times v - u\times v'}{v^2}$
- $(u^n)' = n \times u^{n-1} \times u' \quad (n \in \mathbb{R})$
- $(sen\, u)' = u' \times cos\, u$
- $(cos\, u)' = -u' \times sen\, u$
- $(tg\, u)' = \frac{u'}{cos^2 u}$
- $(e^u)' = u' \times\ e^u$
- $(a^u)' = u' \times a^u \times\ ln\, a \ \ (a \in \mathbb{R}^+\backslash\{1\})$
- $(ln\, u)' = \frac{u'}{u}$
- $(log_a u)' = \frac{u'}{u \times ln\, a} \ \ (a \in \mathbb{R}^+\backslash\{1\})$

## Modelos de funções de crescimento

Um modelo de crescimento exponencial é definido por uma função do tipo

- $f(x) = a \times b^x, b > 1$

Um modelo de decrescimento exponencial é definido por uma função do tipo

- $f(x) = a \times b^x, 0 < b < 1$

O modelo logístico é uma função do tipo

- $f(x) = \frac{c}{1+a\times e^{-bx}}, a, b, c \in \mathbb{R}^+$

## Regras operatórias das potências e dos logaritmos

Sejam $a \neq 0$ e $b \neq 0$:

- $a^n \times a^m = a^{n+m}$
- $a^n \times b^n = (a \times b)^n$
- $a^n : a^m = a^{n-m}$
- $a^n : b^n = \left(\frac{a}{b}\right)^n$
- $(a^n)^m = a^{n\times m}$
- $a^0 = 1$
- $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$
- $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m},\ a \in \mathbb{R}^+, m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}$

Sejam $p \in \mathbb{R}, x, y \in \mathbb{R}^+ \ e\ a, b \in \mathbb{R}^+ \backslash \{1\}$:

- $\log_a x = y \Leftrightarrow a^y = x$
- $\log_a (x \times y) = \log_a x + \log_a y$
- $\log_a \left(\frac{x}{y}\right) = \log_a x - \log_a y$
- $\log_a x^p = p \times \log_a x$
- $\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a}$

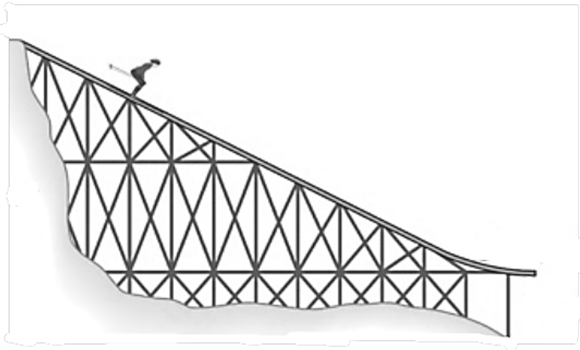
## Trigonometria

- Fórmula fundamental da trigonometria: $\text{sen}^2 x + \cos^2 x = 1$
- $1 + \frac{1}{tg^2 x} = \frac{1}{sen^2\, x}$
- $1 + tg^2 x = \frac{1}{cos^2\, x}$
- $tg\ x = \frac{sen\ x}{cos\ x}$
- $sen\ x = sen\ \alpha \Leftrightarrow x = \alpha + 2k\pi \ \vee\ x = \pi - \alpha + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$
- $cos\ x = cos\ \alpha \Leftrightarrow x = \pm\alpha + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$
- $tg\ x = tg\ \alpha \Leftrightarrow x = \alpha + k\pi, k \in \mathbb{Z}$

## Álgebra

- $ax^2 + bx + c = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}, a \neq 0$

1. Os saltos de esqui são uma modalidade de desporto de inverno onde os atletas descem uma rampa, seguindo-se um longo voo sobre uma pista de neve.



1.1. Os atletas só podem iniciar a descida após o aparecimento de uma luz verde. Considere que um atleta iniciou a descida 6 segundos após a luz verde acender e que o tempo de descida da rampa foi sete segundos. Considere ainda que a rampa tem uma extensão de 91 metros. Qual o modelo matemático que melhor aproxima a situação descrita, sendo $D$ a distância, em metros, percorrida na rampa pelo atleta e $t$ o tempo, em segundos, decorrido após a luz verde acender?

**(A)** $D(t) = 15t - 90 \quad , \quad 0 \leq t \leq 13$

**(B)** $D(t) = t^2 - 6t \quad , \quad 0 \leq t \leq 13$

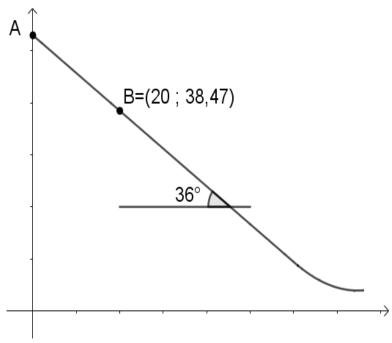
**(C)** $D(t) = \begin{cases} 0 & , \quad 0 \leq t \leq 6 \\ 15t - 90 & , \quad 6 < t \leq 13 \end{cases}$

**(D)** $D(t) = \begin{cases} 0 & , \quad 0 \leq t \leq 6 \\ t^2 - 6t & , \quad 6 < t \leq 13 \end{cases}$

1.2. Num determinado salto, o atleta atingiu a velocidade de 95 km/h no final da rampa. Sabendo que uma milha corresponde a 1609 metros (arredondado às unidades), a velocidade do atleta, em milhas por hora, era aproximadamente:

**(A)** $153$ **(B)** $0{,}06$ **(C)** $88$ **(D)** $59$

1.3. Considere, num referencial cartesiano, a representação da rampa. O ponto $A$ corresponde à altura a que o atleta inicia a descida, sendo de 53 metros relativamente ao solo.
De acordo com a informação apresentada, o declive da reta que representa a maior parte da rampa pode ser:




**(A)** $-0{,}8090$ **(B)** $-0{,}7265$ **(C)** $-0{,}5878$ **(D)** $-1{,}3765$

1.4. Na parte de voo, a altura, $a$, do atleta relativamente ao solo, em metros, é dada pela expressão $a(t) = -0{,}5t^2 + 2{,}5t + 3$, com $t$ a corresponder ao tempo, em segundos, decorrido após a descolagem ou saída da rampa.

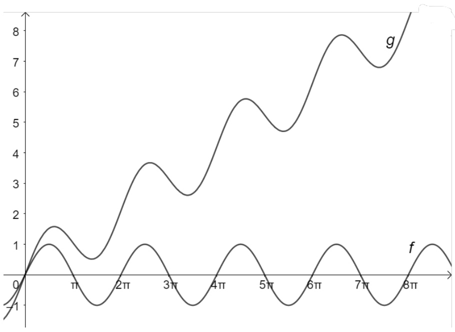
1.4.1. Decorridos 3 segundos, a altura do atleta, em metros, relativamente ao solo era:

**(A)** $7$ **(B)** $6$ **(C)** $4$ **(D)** $5$

1.4.2. Pode-se afirmar que:

**(A)** O atleta nunca esteve a 6 metros do solo.
**(B)** Na descolagem, a altura da rampa ao solo era 2 metros.
**(C)** A duração do voo foi de 6 segundos.
**(D)** Não houve dois momentos em que o atleta esteve à mesma altura do solo.

2. Considere as seguintes funções $f$ e $g$ representadas graficamente:




Pode-se afirmar que:

**(A)** $f(x) = f(x + 2\pi)$ **(B)** $g(x) = f(x) + 8$ **(C)** $f(x) = g(x + 8\pi)$ **(D)** $g(x) = g(x + 2\pi)$

3. Considere a função logística $f(x) = \frac{100}{1+3e^{-0{,}03x}}$

A equação da assíntota ao gráfico de $f$, quando $x \to +\infty$, é:

**(A)** $y = \frac{100}{3}$ **(B)** $x = 100$ **(C)** $y = 100$ **(D)** $x = \frac{100}{3}$

4. O conjunto solução da equação $(4^{3-x})^{2-x} = 1$ é:

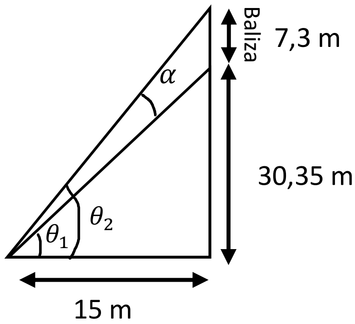
**(A)** $\{2,3\}$ **(B)** $\{0,3\}$ **(C)** $\{0\}$ **(D)** $\{3\}$

5. Sabendo que $log_3\left(\frac{\sqrt[3]{81}}{a}\right) = -\frac{17}{3}$. O valor de $a$ é:

**(A)** $3$ **(B)** $7^3$ **(C)** $7$ **(D)** $3^7$

6. Num campo de futebol, com 68 $m$ de largura, a baliza tem 7,3 $m$. Um jogador está situado na linha lateral à distância de 15 $m$ da linha de fundo e vai rematar à baliza. A amplitude de golo, correspondente à amplitude do ângulo $\alpha$ (arredondado à décima do grau) é:

**(A)** $5{,}6°$ **(B)** $4{,}6°$ **(C)** $2{,}6°$ **(D)** $3{,}6°$




7. Sabendo que $y = 2x + 3$ é a equação da reta tangente ao gráfico da função $f$ no ponto de coordenadas $(3\,,9)$, pode-se afirmar que:

**(A)** $f'(3) = 9$ **(B)** $f'(3) = 2$ **(C)** $f'(3) = 0$ **(D)** $f'(3) = 3$

8. Considere a tabela, onde $f'$ representa a derivada de uma função $f$ de domínio $\mathbb{R}$

| $x$ | | $a$ | | $b$ | |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | $+$ | 0 | $+$ | 0 | $-$ |

8.1. Relativamente aos extremos da função $f$, pode-se afirmar que:

**(A)** $f(a)$ é máximo relativo
**(B)** $f(b)$ é máximo relativo
**(C)** $f(b)$ é mínimo relativo
**(D)** $f(a)$ é mínimo relativo

8.2. Relativamente à monotonia da função $f$, pode-se afirmar que:

**(A)** $f$ é crescente em $\mathbb{R}$
**(B)** $f$ é crescente em $[b, +\infty[$
**(C)** $f$ é decrescente em $[a, b]$
**(D)** $f$ é crescente em $]-\infty, a]$

9. Considere a função $P(x) = 100 - (x - 30)^2$. A taxa média de variação de $P$ no intervalo $[50, 60]$ é:

**(A)** $50$ **(B)** $100$ **(C)** $10$ **(D)** $-50$

10. Um professor de matemática registou o tempo que 19 alunos de uma turma demoraram a efetuar uma simples multiplicação. Os tempos, em minutos, obtidos e ordenados por ordem crescente foram os seguintes:

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0,40 | 0,45 | 0,47 | 0,50 | 0,56 | 0,59 | 1,02 | 1,04 | 1,08 | 1,12 |
| 1,13 | 1,13 | 1,17 | 1,19 | 1,26 | 1,29 | 1,34 | 1,42 | 1,56 | |

Qual o valor do 1º quartil?

**(A)** 0,47 **(B)** 0,56 **(C)** 1,26 **(D)** 1,12

11. Uma certa balança pesa sempre mais 3 gramas do que o peso real. Pesaram-se 10 maçãs tendo o desvio padrão dos pesos obtidos sido de 20 gramas. Qual o desvio padrão real dos pesos?

**(A)** 26 gramas **(B)** 23 gramas **(C)** 17 gramas **(D)** 20 gramas

12. Seja $S$ o espaço de resultados associado a uma certa experiência aleatória. Sejam $A, B \subset S$ dois acontecimentos de probabilidade não nula. Sabe-se que:
$P(A \cap B) = 0{,}1$
$P(A \cup B) = 0{,}8$
$P(A|B) = 0{,}25$
Assinale a resposta correta:

**(A)** $P(A) = 0{,}6$ **(B)** $P(A) = 0{,}7$ **(C)** $P(A) = 0{,}5$ **(D)** $P(A) = 0{,}4$

13. Considere $A$ e $B$ dois acontecimentos tais que $P(A) = 0{,}55$ e $P(A \cup B) = 0{,}7$. Sabendo que $A \cap B = \emptyset$ (acontecimentos incompatíveis), o valor de $P(B)$ é:

**(A)** $P(B) = 0{,}15$ **(B)** $P(B) = 0{,}30$ **(C)** $P(B) = 0{,}25$ **(D)** $P(B) = 0{,}20$

14. Considere uma caixa contendo 40 bolas de dimensões idênticas, de cores azul ou verde. Considere a experiência aleatória que consiste em retirar uma bola dessa caixa. Sabendo que a probabilidade de sair uma bola azul é de 0,6 pode-se afirmar que a caixa tem o seguinte número de bolas verdes:

**(A)** 16 **(B)** 20 **(C)** 6 **(D)** 24

15. Seja *X* a variável aleatória que representa o número de vezes que o Miguel janta fora de casa por semana. A distribuição da função de probabilidade de *X* é a seguinte:

| $x_i$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $P(X = x_i)$ | 0,20 | 0,10 | 0,40 | *y* | *z* | 0,05 |

Sabendo que a probabilidade do João almoçar pelo menos 4 vezes fora de casa durante a semana é igual à probabilidade de almoçar exatamente três vezes fora de casa, o valor de *y* é:

**(A)** 0,05 **(B)** 0,10 **(C)** 0,20 **(D)** 0,15