Instituto Politécnico de Viana do Castelo
Escola Superior de Tecnologia e Gestão

AVALIAÇÃO DA CAPACIDADE PARA A FREQUÊNCIA DE CURSO SUPERIOR - 1º CICLO DE ESTUDOS

PROVA ESPECÍFICA DE CONHECIMENTOS E COMPETÊNCIAS: CULTURA MATEMÁTICA

ESTG – IPVC

Duração da Prova: 1h45. Tolerância: 15 minutos

20 de maio de 2020 5 páginas

INSTRUÇÕES

Identifique com o seu nome e número do Cartão do Cidadão todas as folhas de resposta.

Utilize apenas caneta ou esferográfica de tinta azul ou preta, exceto nas respostas que impliquem construções, desenhos ou outras representações, que podem ser primeiramente feitos a lápis e a seguir passados a tinta.

É permitido o uso de régua e de calculadora elementar (não alfanumérica e não programável).

Não é permitido o uso de corretor. Deve riscar aquilo que pretende que não seja classificado. Para cada resposta, identifique o grupo e o item.

Em todas as respostas, indique todos os cálculos que tiver de efetuar e todas as justificações necessárias.

Apresente as suas respostas de forma legível.

Apresente apenas uma resposta para cada item.

A prova é constituída por 4 grupos cada um com uma cotação de 5 valores. No grupo 4 tem duas questões opcionais (A ou B). Assinale de forma clara qual a questão escolhida.

GRUPO I

1. No âmbito de um estudo realizado, tendo como objetivo a caracterização do comportamento dos clientes de um hipermercado de Vila Nova de Anha na altura da quarentena imposta para a COVID-19, analisaram-se três características (número, idade e género) dos ocupantes por veículo para 100 veículos que entraram no parque automóvel do referido hipermercado, num fim de semana. Os dados recolhidos relativamente a essas três características foram apresentados na forma que se segue. Nas Tabelas 1 e 2 estão registadas as distribuições do número de ocupantes e a idade dos ocupantes dos 100 veículos, respetivamente. Na Figura 1 é apresentada a distribuição dos ocupantes pelo seu género.

N.º de ocupantes por veículo	Freq. absoluta	Freq. relativa
1	12	0.12
2	15	0.15
3	24	0.24
4	19	0.19
5	15	0.15
6	10	0.10
7	5	0.05
Total:	100	1

Tabela 1: Distribuição do n.º de ocupantes

Idade dos ocupantes (anos)	n_i	N_i	f_i	F_i
$[0,10[$		18		
$[10,20[$	54			
$[20,30[$				
$[30,40[$	90			0.650
$[40,50[$		306		
$[50,60[$				
$[60,70[$			0.025	0.975
$[70,80[$				

Tabela 2: Distribuição da idade dos ocupantes

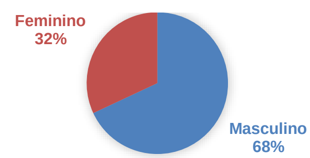

Figura 1: Distribuição dos ocupantes por género

Apresente todos os resultados com três casas decimais.

1.1 Qual é a razão entre os géneros dos ocupantes?

1.2 Complete a tabela de distribuição de frequências da idade dos ocupantes (Tabela 2), onde n_i, f_i são as frequências absoluta e relativa, respetivamente, e N_i, F_i são as frequências absoluta e relativa acumuladas, respetivamente.

1.3 Que percentagem de ocupantes têm menos de 50 anos de idade?

1.4 Considerando a distribuição da idade dos ocupantes, calcule o desvio padrão. Se não resolveu a alínea 1.2, determine esta medida para a distribuição do número de ocupantes (neste caso terá uma penalização de 25% da cotação).

1.5 Determine a mediana do número de ocupantes. Como interpreta este resultado no contexto apresentado.

1.6 Sabe-se que 150 ocupantes realizaram um teste de despiste da COVID-19, 45 dos ocupantes realizaram dois testes de despiste da COVID-19 e 130 ocupantes não realizaram nenhum teste. Considere a experiência aleatória que consiste na seleção, ao acaso, de um ocupante. Considere os acontecimentos: A: *realizou um teste de despiste da COVID-19;* B: *realizou dois testes de despiste da COVID-19.*

1.6.1. Indique, justificando, o valor lógico da expressão: “$P(A \cap B) = 0$”.

1.6.2. Determine $P(\bar{A} \cap \bar{B})$.

GRUPO II

1. Considere a função f representada na Figura 2.

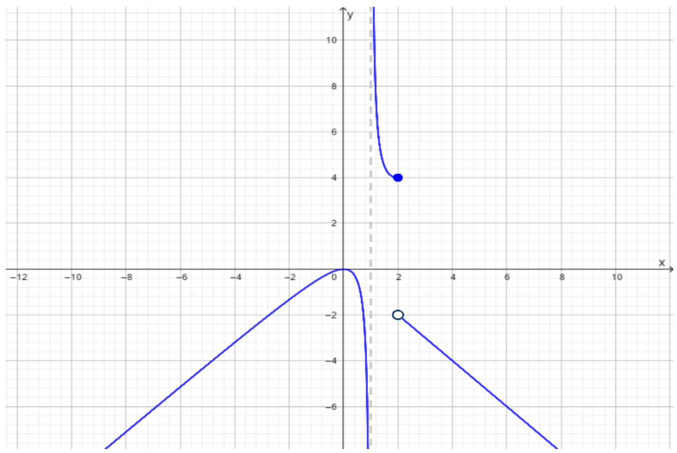

Figura 2: Representação gráfica da função f

1.1 Das seguintes quatro expressões analíticas, indique a que representa a função f:

☐ $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2}{x-1}, & x < 2 \\ -x, & x \geq 2 \end{cases}$ ☐ $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2}{x-1}, & x \leq 2 \\ -x, & x > 2 \end{cases}$ ☐ $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2}{x-1}, & x \leq 1 \\ -2x, & x > 1 \end{cases}$ ☐ $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2}{x-1}, & x < 1 \\ -2x, & x \geq 1 \end{cases}$

1.2 Determine o domínio e o contradomínio da função f.

1.3 Qual é o intervalo de valores do domínio onde a função f é negativa.

1.4 Indique um máximo relativo da função f, caso exista.

1.5 Estude a monotonia da função f, ou seja, indique os intervalos onde a função f é estritamente crescente e estritamente decrescente.

1.6 Indique, justificando, o valor lógico das seguintes afirmações:

1.6.1. $\lim_{x \to 1} f(x)$ não existe.

1.6.2. $\lim_{x \to 2^+} f(x) = f(2)$.

2. A evolução dos casos infetados com a COVID-19 em Vila Nova de Anha é representada pela função $g(d) = -\frac{1}{15}d^2 + 4d$, onde $d \geq 0$ é o número de dias.

2.1 Determine o(s) zero(s) da função. Como interpreta este resultado no contexto do problema.

2.2 Ao final de quantos dias o número de infetados atinge o seu máximo? Justifique.

2.3 Qual o crescimento de infetados do 20.º para o 21.º dia da infeção? Justifique.

2.4 Determine o conjunto solução da inequação $g(d) \geq 40$.

GRUPO III

1. Num referencial o.n. xOy, considere os pontos $A = (0,2)$; $B = (a - b, a^2 - a)$.

1.1 Sabendo que a bissetriz dos quadrantes ímpares é a mediatriz do segmento de reta $[A\,B]$, indique, justificando, os valores de a e b.

1.2 Escreva a equação reduzida da reta que contém o segmento $[A\,B]$.

1.3 Indique a amplitude angular e o ponto de interseção entre o eixo y e a reta que contém o segmento $[A\,B]$.

1.4 Determine o ponto de intersecção da reta que contém o segmento $[A\,B]$ com a bissetriz dos quadrantes ímpares. Represente graficamente (com rigor) a reta que contém o segmento $[A\,B]$, a bissetriz dos quadrantes ímpares e o respetivo ponto de interseção.

1.5 Represente num referencial a região do plano definida pelas condições: $y \geq -x \wedge y < 4 \wedge x \leq 8$.

2. Na Figura 3 está representado no referencial o.n. $Oxyz$ um prisma quadrangular regular de faces paralelas aos planos coordenados. Determine:

2.1 O valor de k, caso exista, de modo que o vetor $\vec{v} = (k^2 + 7k, k^2 - 1, -7)$ seja colinear com AH.

2.2 Escreva a equação do plano que passa pelo ponto F e é paralelo ao plano xOz.

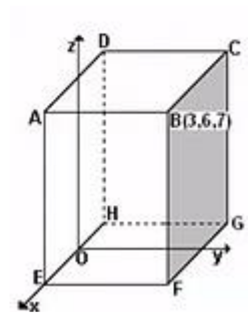

Figura 3

GRUPO IV – Responda <u>apenas a uma</u> das questões A ou B

A. Seja (a_n) uma progressão aritmética tal que a soma dos três primeiros termos é 24 e $a_8 = 26$.

A.1 Sem determinar o termo geral de (a_n), indique o valor do termo a_{300}.

A.2 Determine a soma de todos os termos consecutivos de (a_n) entre o nono e o tricentésimo, inclusive.

A.3 Mostre que o termo geral da sucessão $(b_n) = \left(\frac{a_n}{n}\right)$ é $b_n = 3 + \frac{2}{n}$.

A.4 Mostre que (b_n) é estritamente decrescente.

A.5 A sucessão (b_n), $\forall n \in \mathbb{N}$ é limitada? Justifique a sua resposta.

A.6 Mostre que a sucessão (c_n) definida por $c_n = \frac{1}{{b_1}^{a_n}}$ é uma progressão geométrica e indique a sua razão.

B. Sejam f e g duas funções reais de variável real definidas por:

$$f(\alpha) = -2\cos\left(\frac{\alpha}{2} + \frac{\pi}{3}\right) \qquad \text{e} \qquad g(\alpha) = \frac{1+\left(\cos\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)\cos(\alpha)\right)^2+\cos^4(\alpha)}{\cos^2(\pi-\alpha)}.$$

B.1 Para mostrar que $\operatorname{sen}^2(\alpha) + \cos^2(\alpha) = 1$ complete os espaços cinza na demonstração seguinte com o apoio da Figura 4.

O ponto $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) \in$ **circunferência** se e somente se:

____ + ____ $= \boldsymbol{r}^2$.

Como $\mathbf{sen}(\boldsymbol{\alpha}) = \frac{\text{____}}{\boldsymbol{r}}$ e $\mathbf{cos}(\boldsymbol{\alpha}) = \frac{\boldsymbol{a}}{\text{____}}$, então:

____ + ____ $= \boldsymbol{r}^2 \Leftrightarrow$ ____ + ____ $= \mathbf{1}$.

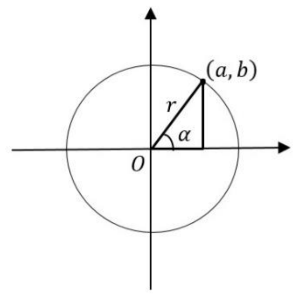

Figura 4

B.2 Utilizando a igualdade demonstrada na alínea anterior e as relações entre as razões trigonométricas de um ângulo, verifique que $g(\alpha) = 2 + \operatorname{tg}^2(\alpha)$.

B.3 Indique o valor máximo da função $h(\alpha) = (g(\alpha) - 2) \cdot \cos^2(\alpha) + 3$ e o respetivo maximizante no intervalo $[-\pi, 0]$. Justifique.

B.4 Seja $\beta \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ tal que $f\left(2\beta + \frac{\pi}{3}\right) = -1$. Determine, justificando, o valor de $g(6\beta)$.

RAZÕES TRIGONOMÉTRICAS:

	$\theta = \frac{\pi}{6}$	$\theta = \frac{\pi}{4}$	$\theta = \frac{\pi}{3}$
$sen\ \theta$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\cos\theta$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
$tg\ \theta$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$

FIM